第28卷 第3期 工 程 数 学 学 报 Vol. 28 No. 3
2011年06月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS June 2011

文章编号:1005-3085(2011)03-0307-08

求解鞍点问题的多项式加速超松弛方法*

潘春平[1]， 王红玉[1,2]

(1- 浙江工业职业技术学院，绍兴 312000； 2- 华东师范大学数学系，上海 200062)

摘 要: 为了快速有效地求解大型稀疏鞍点问题，在广义逐次超松弛(GSOR)迭代算法的基础上，结合Chebyshev多项式加速技术，本文构造了一种多项式加速超松弛迭代算法，并研究了该算法的收敛性．通过讨论加速后迭代矩阵的收敛性证明了新方法比加速前的迭代法具有快的收敛速度．数值例子也表明新方法提高了GSOR算法的收敛效率．

关键词: 鞍点问题；迭代法；GSOR方法；Chebyshev多项式

分类号: AMS(2000) 65F10; 65F50 **中图分类号**: O241.6 **文献标识码**: A

1 引言

大型稀疏鞍点问题的求解在很多应用领域都出现过，并且非常重要，如计算流体力学中的Stokes方程和电磁学Maxwell方程的有限元离散以及二阶椭圆方程问题的混合有限元方法，带有限制条件的二次优化问题，线性弹性力学问题，图像处理问题，最小二乘问题等[1,2]．本文主要考虑具有如下形式的鞍点问题

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中$A\in R^{m\times m}$为对称正定矩阵，$B\in R^{m\times n}$为列满秩矩阵，即$\mathrm{rank}(B)=n$，向量$x,p\in R^m$，向量$y,q\in R^n$(这里我们假定$m\ge n$)，B^T是B的转置矩阵，p,q是已知向量．在这样的假设下，鞍点问题(1)有唯一解[1]．当前已经存在很多方法求解鞍点问题，其中包括直接法、Krylov子空间方法、Uzawa算法、SOR-like算法[3]以及它的推广算法[4-6]、HSS算法、GAOR算法[7]等．由于直接法在求解大型稀疏线性方程组时，可能会产生许多非零元，从而导致运算量大量增加，而且对于条件数很大的系数矩阵，直接法往往会产生很大的误差．因此在求解大型稀疏线性方程组时，我们通常会选择迭代法．迭代解法简单有效，只需较小的存储空间，容易实现，从而在解鞍点问题的一类方法中迭代解法得到了大量的研究结果．

鞍点问题(1)是对称不定的、系数矩阵对角块中含有奇异矩阵的线性系统．它的这些特点使得一些著名的迭代算法，如PCG算法和SOR算法[8]难以直接应用，因此，有许多学者提出了一些新的迭代算法用于求解这类问题．其中Uzawa算法[9]和预条件Uzawa算法[10]是一类较早被提出用于求解鞍点问题的经典迭代算法．经典的SOR迭代是非常简单而有效的方法之一，在工程计算中有着广泛的应用．鞍点问题(1)的特点使SOR算法[11]难以直接应用，Golub等人通过对系数矩阵进行适当的分解，构造出了一种SOR-like迭代方法[3]，在此基础上白中治等人又提出了一种修正后的GSOR迭代算法[12]．

收稿日期: 2009-10-09. **作者简介**: 潘春平(1978年3月生)，男，讲师．研究方向：数值代数．
***基金项目**: 浙江工业职业技术学院科技计划(KY2010109).

为了表示方便，我们将方程组 (1) 等价表示为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix}, \tag{2}$$

将方程组 (2) 的系数矩阵 $\mathcal{A}$ 作如下分裂

$$\mathcal{A} \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix} = D - L - U,$$

其中

$$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^T & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

$Q \in R^{n\times n}$ 是对称非奇异矩阵．设

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega I_m & 0 \\ 0 & \tau I_n \end{pmatrix},$$

ω 和 τ 为两个非零的实数，$I_m \in R^{m\times m}$，$I_n \in R^{n\times n}$ 分别是 m 阶和 n 阶单位阵，考虑如下一般的 SOR 迭代格式

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = (D - \Omega L)^{-1}\big[(1-\Omega)D + \Omega U\big] \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} + (D - \Omega L)^{-1}\Omega \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix}, \tag{3}$$

简记为

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = M_{(\omega,\tau)} \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} + H^{-1}_{(\omega,\tau)} \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix},$$

其中

$$H_{(\omega,\tau)} \equiv \Omega^{-1}(D - \Omega L) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}A & 0 \\ -B^T & \frac{1}{\tau}Q \end{pmatrix},$$

$$M_{(\omega,\tau)} \equiv (D - \Omega L)^{-1}\big[(1-\Omega)D + \Omega U\big] = \begin{pmatrix} (1-\omega)I & -\omega A^{-1}B \\ (1-\omega)\tau Q^{-1}B^T & I - \omega\tau Q^{-1}B^TA^{-1}B \end{pmatrix}. \tag{4}$$

由此得到 GSOR 算法：设 $Q \in R^{n\times n}$ 是对称非奇异矩阵，给定初始向量 $x^{(0)} \in R^m$，$y^{(0)} \in R^n$ 和两个松弛参数 ω, $\tau > 0$．当 $k = 0, 1, 2, \cdots$，直到迭代序列 $\{({x^{(k)}}^T, {y^{(k)}}^T)^T\}$ 收敛，计算

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega A^{-1}(p - By^{(k)}), \\ y^{(k+1)} = y^{(k)} + \tau Q^{-1}(B^Tx^{(k+1)} - q). \end{cases} \tag{5}$$

2 用Chebyshev多项式加速的GSOR迭代算法

假设λ是迭代矩阵$M_{(\omega,\tau)}$的一个非零特征值，$(\tilde{x}^T,\tilde{y}^T)^T\in R^{m+n}$是其对应的特征向量，则由(4)可得

$$\begin{pmatrix} (1-\omega A) & -\omega B \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} A & 0 \\ -\tau B^T & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

即

$$\begin{cases} (1-\omega-\lambda)A\tilde{x}=\omega B\tilde{y}, \\ (\lambda-1)Q\tilde{y}=\lambda\tau B^T\tilde{x}. \end{cases} \tag{7}$$

由于A是对称正定的，由(7)可得$(1-\omega-\lambda)\tilde{x}=\omega A^{-1}B\tilde{y}$，若$\lambda\neq 1-\omega$，由于$Q$是非奇异的，进一步可得到$(1-\omega-\lambda)(\lambda-1)\tilde{y}=\lambda\tau\omega J\tilde{y}$，这里$J=Q^{-1}B^TA^{-1}B$．若$\lambda=1-\omega\neq 0$，则有$B\tilde{y}=0$，$-\omega Q\tilde{y}=\lambda\tau B^T\tilde{x}$，可得$\tilde{y}=0$，$\tilde{x}\in N(B^T)$，$N(B^T)$是矩阵$B^T$的零空间．因此，$\lambda=1-\omega$是$M_{(\omega,\tau)}$对应于特征向量$(\tilde{x}^T,0)^T$的一个特征值．当$\lambda\neq 1-\omega$时，设$\mu$是$J$的一个特征值，可得$(\lambda-1)(1-\omega-\lambda)=\lambda\tau\omega\mu$，即$\lambda$满足二次方程

$$\lambda^2+(\tau\omega\mu+\omega-2)\lambda+1-\omega=0. \tag{8}$$

通过解(8)，我们可得当$\omega\in\left[\frac{4\tau\mu}{(1+\tau\mu)^2},+\infty\right)$时，$M_{(\omega,\tau)}$的特征值$\lambda$是实数．由GSOR迭代算法的收敛性知，当$0<\omega<2$且$0<\tau<\frac{2(2-\omega)}{\omega\mu_{\max}}$时，GSOR迭代算法收敛[12]．则当$0<\omega<2$且$0<\tau<\frac{2(2-\omega)}{\omega\mu_{\max}}$时，有$|\lambda|<1$，于是当

$$\frac{4\tau\mu}{(1+\tau\mu)^2}\leq\omega<2,\quad 0<\tau<\frac{2(2-\omega)}{\omega\mu_{\max}}$$

时，$M_{(\omega,\tau)}$的特征值λ是实数且$|\lambda|<1$．这样，我们给出用Chebyshev多项式加速迭代法的前提，记

$$u^{(k)}=\begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix},\quad c=H_{(\omega,\tau)}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix},$$

则GSOR迭代格式简记为

$$u^{(k+1)}=M_{(\omega,\tau)}u^{(k)}+c. \tag{9}$$

把上述迭代格式用多项式加速，迭代格式如下

$$u^{(k+1)}=\rho^{(k+1)}\left[v\left(M_{(\omega,\tau)}u^{(k)}+c\right)+(1-v)u^{(k)}\right]+(1-\rho^{(k+1)})u^{(k-1)}, \tag{10}$$

其中$u^{(0)}$是任意初始向量，且

$$\rho^{(k+1)}=\begin{cases} 2, & k=0, \\ \left(1-\frac{1}{4\xi^2}\rho^k\right)^{-1} & k\geq 1. \end{cases}$$

其中

$$\xi=\frac{2-\beta-\alpha}{\beta-\alpha},\quad v=\frac{2}{2-\beta-\alpha},$$

α, β 分别是矩阵 $M_{(\omega,\tau)}$ 的最小和最大特征值的估计值．由此得到如下 Chebyshev 多项式加速的GSOR迭代算法(简记为C-GSOR迭代算法)：设 $Q \in R^{n\times n}$ 是对称非奇异矩阵，给定初始向量 $x^{(0)} \in R^m$，$y^{(0)} \in R^n$ 和两个松弛参数 $\omega, \tau > 0$，令 $k = 1,2,3,\cdots$，直到迭代序列 $\{(x^{(k)^T}, y^{(k)^T})^T\}$ 收敛，计算

$$\begin{cases} x^{(1)} = (1-\omega)x^{(0)} + \omega A^{-1}(p - By^{(0)}), \\ y^{(1)} = y^{(0)} + \tau Q^{-1}(B^T x^{(1)} - q), \\ x^{(k+1)} = \rho^{(k+1)}\big[(1-v\omega)x^{(k)} + v\omega A^{-1}(p - By^{(k)})\big] + (1-\rho^{(k+1)})x^{(k-1)}, \\ y^{(k+1)} = \rho^{(k+1)}\big[y^{(k)} + v\tau Q^{-1}(B^T x^{(k+1)} - q)\big] + (1-\rho^{(k+1)})y^{(k-1)}. \end{cases} \tag{11}$$

3 C-GSOR迭代算法的收敛性分析

定理1 设 $A \in R^{m\times m}$, $Q \in R^{n\times n}$ 是对称正定矩阵，$B \in R^{m\times n}$ 为列满秩矩阵，令 $\mu_{\min}$，$\mu_{\max}$ 分别为 $J = Q^{-1}B^TA^{-1}B$ 的最小和最大特征值．若参数 ω, τ 满足以下条件：

1) 当 $0 < \tau \le \dfrac{1}{\sqrt{u_{\min}u_{\max}}}$ 时，$\omega_-(\tau) \le \omega < 2$;

2) 当 $\dfrac{1}{\sqrt{u_{\min}u_{\max}}} < \tau < \dfrac{2(2-\omega)}{\omega\mu_{\max}}$ 时，$\omega_+(\tau) \le \omega < 2$;

这里

$$\omega_-(\tau) = \frac{4\tau\mu_{\min}}{(1+\tau\mu_{\min})^2}, \quad \omega_+(\tau) = \frac{4\tau\mu_{\max}}{(1+\tau\mu_{\max})^2},$$

则 $M_{(\omega,\tau)}$ 的特征值 λ 是实数且 $|\lambda| < 1$.

证明 因为当

$$\frac{4\tau\mu}{(1+\tau\mu)^2} \le \omega < 2, \quad 0 < \tau < \frac{2(2-\omega)}{\omega\mu_{\max}}$$

时，$M_{(\omega,\tau)}$ 的特征值 λ 是实数且 $|\lambda| < 1$，又因为

(i) 当 $0 < \tau \le \dfrac{1}{\sqrt{u_{\min}u_{\max}}}$ 时，对任意的 μ，有 $\dfrac{4\tau\mu}{(1+\tau\mu)^2} \ge \dfrac{4\tau\mu_{\min}}{(1+\tau\mu_{\min})^2}$;

(ii) 当 $\dfrac{1}{\sqrt{u_{\min}u_{\max}}} < \tau < \dfrac{2(2-\omega)}{\omega\mu_{\max}}$ 时，对任意的 μ，有 $\dfrac{4\tau\mu}{(1+\tau\mu)^2} \ge \dfrac{4\tau\mu_{\max}}{(1+\tau\mu_{\max})^2}$;

所以上述定理成立.

定理2 若 ω, τ 满足定理1的条件，则C-GSOR迭代算法收敛.

证明 设

$$u^{(*)} = \begin{pmatrix} x^{(*)} \\ y^{(*)} \end{pmatrix}$$

是算法的精确解．令 $\zeta^{(k)} = u^{(k)} - u^{(*)}$，易知 $\zeta^{(k)} = q_k(M_{(\omega,\tau)})\zeta^{(0)}$．于是要证明所给出的迭代格式收敛，只需证明 $\rho(q_k(M_{(\omega,\tau)})) < 1$ 即可．由 Chebyshev 多项式性质知 $q_k(x)$ 是关于 x 的 k 次多项式．定义如下

$$q_k(x) = T_k\Big(\frac{2x-\beta-\alpha}{\beta-\alpha}\Big)\Big/T_k\Big(\frac{2-\beta-\alpha}{\beta-\alpha}\Big),$$

其中 $T_k(x)$ 是 k 次多项式，定义为

$$T_k(x)=\frac{1}{2}\Big(\big(x+\sqrt{x^2-1}\,\big)^k+\big(x-\sqrt{x^2-1}\,\big)^k\Big),\quad -\infty<x<+\infty,$$

又因为当 ω,τ 满足定理1的条件时，$M_{(\omega,\tau)}$ 的特征值 λ 是实数且 $|\lambda|<1$，令 $\lambda(M_{(\omega,\tau)})\subseteq[\alpha,\beta]\subset(-1,1)$，注意到

$$\max_{\alpha\le x\le\beta}\left|T_k\Big(\frac{2x-\beta-\alpha}{\beta-\alpha}\Big)\right|=1,\tag{12}$$

令 $\xi=\frac{2-\beta-\alpha}{\beta-\alpha}>1$，当 $x>1$ 时，$T_k(x)=\frac{1}{2}\big((x+\sqrt{x^2-1}\,)^k+(x-\sqrt{x^2-1}\,)^k\big)$，可得

$$\rho\big(q_k(M_\omega,\tau)\big)=\max_{u\in\lambda(M_{(\omega,\tau)})}|q_k(u)|\le\max_{\alpha\le x\le\beta}|q_k(x)|=\big(T_k(\xi)\big)^{-1}=\frac{2\sigma^k}{1+\sigma^{2k}}<1,\tag{13}$$

其中 $\sigma=\xi^2-\sqrt{\xi^2-1}=(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\,)^{-1}<1$，所以该迭代法在 ω,τ 满足以上条件时收敛.

下面给出GSOR迭代算法最优参数的相关结论[12]：

1) 当 $\tau\le\dfrac{1}{\sqrt{u_{\min}u_{\max}}}$ 时，有

$$\rho(M_{\omega,\tau})=\begin{cases}\sqrt{1-\omega}, & \text{若}\ 0<\omega<\omega_-(\tau),\\ \frac{1}{2}\Big(2-\omega-\tau\omega\mu_{\min}+\omega\sqrt{(2-\omega-\tau\omega\mu_{\min})^2-4(1-\omega)}\,\Big), & \\ \qquad \text{若}\ \omega_-(\tau)\le\omega\le\omega_0(\tau), & \\ \frac{1}{2}\Big(\tau\omega\mu_{\max}+\omega-2+\sqrt{(\tau\omega\mu_{\max}+\omega-2)^2-4(1-\omega)}\,\Big), & \\ \qquad \text{若}\ \omega_0(\tau)<\omega<2;\end{cases}\tag{14}$$

2) 当 $\dfrac{1}{\sqrt{u_{\min}u_{\max}}}<\tau<\dfrac{2(2-\omega)}{\omega\mu_{\max}}$ 时，有

$$\rho(M_{\omega,\tau})=\begin{cases}\sqrt{1-\omega}, & \text{若}\ 0<\omega<\omega_+(\tau),\\ \frac{1}{2}\Big(\tau\omega\mu_{\max}+\omega-2+\sqrt{(\tau\omega\mu_{\max}+\omega-2)^2-4(1-\omega)}\,\Big), & \\ \qquad \text{若}\ \omega_+(\tau)\le\omega<2,\end{cases}\tag{15}$$

这里

$$\omega_-(\tau)=\frac{4\tau\mu_{\min}}{(1+\tau\mu_{\min})^2},\quad \omega_+(\tau)=\frac{4\tau\mu_{\max}}{(1+\tau\mu_{\max})^2},\quad \omega_0(\tau)=\frac{4}{\tau(\mu_{\min}+\mu_{\max})+2},$$

因此，最优参数为

$$\omega_{\rm opt}=\frac{4\sqrt{\mu_{\min}\mu_{\max}}}{(\sqrt{\mu_{\min}}+\sqrt{\mu_{\max}}\,)^2},\quad \tau_{\rm opt}=\frac{1}{\sqrt{\mu_{\min}\mu_{\max}}},\quad \rho(M_{\omega_{\rm opt},\tau_{\rm opt}})=\frac{\sqrt{\mu_{\max}}-\sqrt{\mu_{\min}}}{\sqrt{\mu_{\min}}+\sqrt{\mu_{\max}}}.$$

定理3　假设 $\omega_{\rm opt}$ 和 $\tau_{\rm opt}$ 为GSOR迭代算法的最优参数，C-GSOR迭代算法的迭代矩阵为 $q_k(M_{(\omega,\tau)})$，$\rho(M_{(\omega_{\rm opt},\tau_{\rm opt})})$ 为最优谱半径，则

$$\rho\big(q_k(M_{(\omega_{\rm opt},\tau_{\rm opt})})\big)\le\rho^k\big(M_{(\omega_{\rm opt},\tau_{\rm opt})}\big).$$

证明 设$\rho=\rho(M_{(\omega_{\rm opt},\tau_{\rm opt})})$，令$\alpha=-\rho$, $\beta=\rho$，则$\xi=\frac{2-\beta-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\rho}$. 由

$$\sigma=\xi^2-\sqrt{\xi^2-1}=\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\,\right)^{-1},$$

可得

$$\xi=\frac{1}{2}\Big(\sigma+\frac{1}{\sigma}\Big),\quad \rho=\frac{2}{\sigma+\frac{1}{\sigma}}.$$

又由于

$$\begin{aligned}\rho\big(q_k(M_{(\omega_{\rm opt},\tau_{\rm opt})})\big)&=\max_{u\in\lambda(M_{(\omega_{\rm opt},\tau_{\rm opt})})}|q_k(u)|\\&\le\max_{\alpha\le x\le\beta}|q_k(x)|=\big(T_k(\xi)\big)^{-1}=\frac{2\sigma^k}{1+\sigma^{2k}}<1,\end{aligned}\tag{16}$$

$$\rho^k\big(M_{(\omega_{\rm opt},\tau_{\rm opt})}\big)=\rho^k=\Big(\frac{2}{\sigma+\frac{1}{\sigma}}\Big)^k=\frac{2^k\sigma^k}{(1+\sigma^2)^k},\quad 0<\sigma<1.\tag{17}$$

用数学归纳法可证

$$\frac{2\sigma^k}{1+\sigma^{2k}}\le\frac{2^k\sigma^k}{(1+\sigma^2)^k},\quad 0<\sigma<1,\tag{18}$$

即

$$\rho\big(q_k(M_{\omega_{\rm opt},\tau_{\rm opt}})\big)\le\rho^k\big(M_{\omega_{\rm opt},\tau_{\rm opt}}\big).\tag{19}$$

4 数值例子

下面给出应用本文算法的数值例子. 设A, B分别是一个$m\times m$, $m\times n$的矩阵，满足

$$A=(a_{i,j})_{m\times m}=\begin{cases}i+1, & i=j,\\ 1, & |i-j|=1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\qquad B=(b_{i,j})_{m\times n}=\begin{cases}j, & i=j+m-n,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

向量p, q可以任意选择. 对于SOR-like方法，GSOR方法，C-GSOR方法，我们均选择预处理矩阵$Q=B^TB$. 计算终止的条件是

$$\frac{\|r_k\|_2}{\|r_0\|_2}<10^{-6},\quad r_k=\begin{pmatrix}p\\-q\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}A & B\\-B^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^{(k)}\\y^{(k)}\end{pmatrix},\tag{20}$$

这里SOR-like方法和GSOR方法的最优参数根据已有的结论确定. 下面给出数值实验的结果，所有的结果都是在Intel E2180 2.0GHZ CPU, 2.0G Memory条件下获得的.

从表1至表5中可以看出，在同一精度的条件下，将加速后的新算法C-GSOR与加速前的GSOR算法和SOR-like算法相比，当ω, τ同时取最优参数值时，新算法C-GSOR对GSOR算法有一点加速，但加速的效果不是非常明显，新算法C-GSOR比SOR-like算法具有更快的收敛速度和更少的迭代次数；当ω, τ不选择最优参数值时，新算法C-GSOR能较有效的加速GSOR算法和SOR-like算法收敛速度. 总的来说，新算法C-GSOR能够对GSOR算法和SOR-like算法有一定的加速，新算法提高了GSOR算法和SOR-like算法的收敛效率，特别是对于SOR-like算法具有一定的竞争优势.

表 1: SOR-like 算法收敛迭代次数和时间

m	n	$m+n$	ω_{opt}	IT (次)	CPU (秒)
200	150	350	1.9533	1032	32.75

表 2: GSOR 算法收敛迭代次数和时间

m	n	$m+n$	ω	τ	IT (次)	CPU (秒)
200	150	350	0.7	30	61	3.3

表 3: C-GSOR 算法收敛迭代次数和时间

m	n	$m+n$	ω	τ	IT (次)	CPU (秒)
200	150	350	0.7	30	56	2.3

表 4: GSOR 算法收敛迭代次数和时间

m	n	$m+n$	ω_{opt}	τ_{opt}	IT (次)	CPU (秒)
200	150	350	0.6461	51.2419	30	0.498

表 5: C-GSOR 算法收敛迭代次数和时间

m	n	$m+n$	ω_{opt}	τ_{opt}	IT (次)	CPU (秒)
200	150	350	0.6461	51.2419	29	0.489

致谢: 作者对审稿人建议和评论表示忠心感谢!

参考文献:

[1] Benzi M, Golub G H, Liesen J. Numerical solution of saddle point problems[J]. Acta Numerica, 2005, 14: 1-137

[2] Li C J, Li B J, Evans D J. A generalized successive overrelaxation method for least squares problems[J]. BIT, 1998, 38: 347-356

[3] Golub G H, Wu X, Yuan J Y. SOR-like methods for augmented systems[J]. BIT, 2001, 41: 71-85

[4] Li J C, Kong X. Optimum parameters of GSOR-1ike methods for the augmented systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 204(1): 150-161

[5] Shao X H, Li Z, Li C J. Modified SOR-like method for the augmented system[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2007, 84(11): 1653-1662

[6] 沈海龙，邵新慧，张铁，等. 求解鞍点问题的修正SOR-like方法[J]. 东北大学学报(自然科学版)，2009, 30(6): 905-908
Shen H L, Shao X H, Zhang T, *et al.* Modified SOR-like method for solution to saddle point problem[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science Edition), 2009, 30(6): 905-908

[7] 邵新慧，等. 求解鞍点问题的一般加速超松弛方法[J]. 数值计算与计算机应用，2006, 27(4): 241-248
Shao X H, *et al.* Generalized AOR method for augmented systems[J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications, 2006, 27(4): 242-248

[8] Axelsson O. Iterative Solution Methods[M]. Cambridge: Cambridge University Press,1994

[9] Arrow K, Hurwicz L, Uzawa H. Studies in Nonlinear Programming[M]. Stanford: Stanford University Press, 1958

[10] Bramble J H, Pasciak J E, Vassilev A T. Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problem[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1997, 34(3): 1072-1092

[11] 曹志浩. 数值线性代数[M]. 上海：复旦大学出版社，1996
Cao Z H. Numerical Linear Algebra[M]. Shanghai: Fudan University Press, 1996

[12] Bai Z Z, Parlett B N, Wang Z Q. On generalized successive overrelaxation methods for augmented linear systems[J]. Numerische Mathematik, 2005, 102: 1-38

The Polynomial Acceleration of GSOR Iterative Algorithms for Large Sparse Saddle Point Problems

PAN Chun-ping[1], WANG Hong-yu[1,2]

(1- Zhejiang Industry Polytechnic College, Shaoxing 312000;
2- Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062)

Abstract: In order to solve large sparse saddle point problems (SPP) quickly and efficiently, we construct in this paper a polynomial accelerative iterative algorithm through accelerating the generalized SOR (GSOR) iterative algorithm and using the Chebyshev polynomial. The convergence of the algorithm is also studied. Meanwhile, by examining the convergence of accelerated iterative matrix, the result shows that the new method converges faster than the GSOR method. Numerical results further demonstrate that the new method is more efficient than the GSOR method.

Keywords: saddle-point problems; iterative method; GSOR method; Chebyshev polynomial

Received: 09 Oct 2009. **Accepted:** 09 Apr 2010.
Foundation item: The Science and Technology Project of Zhejiang Industry Polytechnic College (KY2010109).